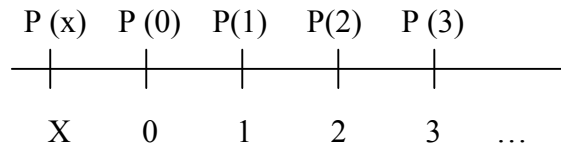


DISTRIBUCIONES DISCRETAS

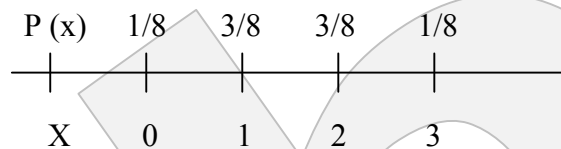
Se dice que una variable aleatoria X es discreta cuando se encuentre definida exclusivamente en puntos ó cuantiles:



- DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD O FUNCION DE CUANTIA: P (X)**

Es la función que nos da las probabilidades de los valores que toma la v.a. X .

Ej.: Función de cuantía de la v.a. n° de caras en 3 lanzamientos:



Donde: $\sum_{i=1}^{\infty} P(X_i) = 1$ y $0 \leq P(X_i) \leq 1$

- DISTRIBUCION ACUMULADA: F (X)**

Mide la probabilidad acumulada hasta un punto incluido dicho punto.

Ej: $F(2) = 7/8$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ 1/8 & \text{si } 0 \leq X < 1 \\ 4/8 & \text{si } 1 \leq X < 2 \\ 7/8 & \text{si } 2 \leq X < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq X \end{cases}$$

- MEDIA , VARIANZA Y DESVIACION:**

$$\text{Media} = \mu_x = \text{Valor Esperado} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x_i)$$

$$\text{Varianza} = \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 P(x_i) - \mu_x^2$$

$$\text{Desviación} = \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

PROPIEDADES:

- La media es el centro de gravedad de la distribución de probabilidades, por lo tanto si la distribución es simétrica, la media será el punto medio de dicha distribución.
- La desviación típica (σ) mide la dispersión de la variable respecto a su media en términos relativos $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ y en las mismas unidades que la variable.
- Media, varianza y desviación de una transformación lineal $z = ax + b$

$$\begin{aligned}\mu_z &= a \mu_x + b \\ \sigma_z^2 &= a^2 \sigma_x^2 \\ \sigma_z &= a \sigma_x\end{aligned}$$

- Media y varianza de una combinación lineal.

$$\begin{aligned}z &= ax + by + c \\ \mu_z &= a \mu_x + b \mu_y + c \\ \sigma_z^2 &= a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2 + 2 ab \text{Cov}_{xy}\end{aligned}$$

- La media y la varianza de la media aritmética muestral. $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

(La media muestral, es una combinación lineal de v.a. independientes y por tanto \bar{x} es una v.a. con media y varianza. Siempre que calculemos \bar{x} lo haremos **mediante muestreo aleatorio simple**, es decir con reposición.

Por este motivo, los elementos x_1, x_2, \dots, x_n serán independientes con la misma media, varianza, y distribución del colectivo al que pertenecen.)

$$\begin{aligned}\mu_{\bar{x}} &= \mu \\ \sigma_{\bar{x}}^2 &= \frac{\sigma^2}{n}\end{aligned}$$

- La media y la varianza de una variable tipificada. $t = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$

$$\begin{aligned}\mu_t &= 0 \\ \sigma_t^2 &= 1\end{aligned}$$

DISTRIBUCIONES ESPECIALES DISCRETAS

➤ DISTRIBUCION DE POISSON $x \in P(\lambda)$

Se trata de una distribución discreta definida en infinitos puntos (infinito numerable). Está definida por un parámetro positivo y no necesariamente entero, al que llamaremos PROMEDIO ($\mu = \lambda$).

El nombre teórico es: “nº de éxitos en un horizonte temporal”, por ejemplo:

- nº de accidentes en un mes,
- nº de salidas de bomberos en un año,

FUNCION DE CUANTIA

Con la siguiente fórmula, podremos calcular la probabilidad de un sólo punto.

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

MEDIA, VARIANZA Y DESVIACION

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

PROPIEDAD DE CONVOLUCION

La suma de n - v.a. independientes Poisson también será Poisson.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \in P(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$$

CONVERGENCIA

$$\text{Si } \lambda \geq 7 : x \in P(\lambda) \Rightarrow x \rightarrow N(\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda)$$

➤ DISTRIBUCION BINARIA ó DE BERNOULLI $x \in b(p)$

Se trata de una distribución discreta que toma únicamente 2 valores, el 0 y el 1, con probabilidades respectivas de q y p.

FUNCION DE CUANTIA

P(x)	q	p
X	0	1

$$P(x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & x=0 \\ 0 & x=1 \end{cases}$$

Donde: $q + p = 1 \Rightarrow q = 1 - p$

MEDIA, VARIANZA Y DESVIACION

$$\mu = \sum x p(x) = p$$

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$$\sigma = \sqrt{p(1-p)}$$

* La suma de n - binarias independientes, todas con el mismo parámetro p, se convertirá en la distribución binomial. $x = x_1 + \dots + x_n \in b(p, n)$

➤ DISTRIBUCION BINOMIAL

Como decíamos anteriormente, una distribución binomial se origina mediante la suma de n - variables aleatorias independientes binarias, todas con el mismo parámetro p, es decir:

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n \in b(p, n)$$

FUNCION DE CUANTIA

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

MEDIA, VARIANZA Y DESVIACION

$$\mu = p + \dots + p = np$$

$$\sigma^2 = pq + \dots + pq = npq$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

PROPIEDAD DE CONVOLUCION

La suma de k-binomiales independientes todas con el mismo parámetro "p" también será binomial

$$z = x_1 + x_2 + \dots + x_k \in b(p, n_1 + \dots + n_k)$$

CONVERGENCIAS DE LA BINOMIAL

En esta distribución tenemos dos tipos de convergencias:

- De binomial a Poisson (De discreta a discreta)
- De binomial a Normal (De discreta a continua)

1º) De binomial a Poisson

Requisitos: $n \geq 30$
 $n \cdot p < 7$

$$x \in b(p, n) \rightarrow P(\mu = \lambda = n \cdot p)$$

2º) De binomial a normal

Requisitos: $n \geq 30$
 $n \cdot p \geq 7$

$$x \in b(p, n) \rightarrow N(\mu = n \cdot p, \sigma^2 = n \cdot p \cdot q)$$